DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.18465834

BIRINCHI TUR CHEBISHEV KO‘PHADLARI VA ULARNING TADBIQIGA OID ILMIY TADQIQOTLAR TAHLILI

Nasiba Djurayeva
O‘zbekiston Respublikasi Ichki ishlar vazirligi Surxondaryo akademik litseyi
nasibajt@mail.ru

ANNOTATSIYA

Ushbu maqola birinchi tur Chebishev ko‘phadlarining nazariy xossalari hamda ularning zamonaviy ilmiy tadqiqotlardagi qo‘llanilishiga bag‘ishlangan. Mazkur ko‘phadlar ortogonallik, minimaks xossa, rekurrent formulalarning mavjudligi, shuningdek nol va ekstremum nuqtalarining aniq taqsimlanishi kabi muhim xususiyatlari sababli sonli analizda alohida o‘rin egallaydi. Maqolada Chebishev ko‘phadlarining asosiy matematik xossalari tahlil qilinib, ularning interpolatsiyalash, approksimatsiyalash, sonli differensiallash va integrallash hamda spektral metodlardagi samaradorligi yoritilgan. Adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, birinchi tur Chebishev ko‘phadlari oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar, Fredgolm integral tenglamalari, kasr tartibli differensial va integro-differensial tenglamalar hamda chegaraviy masalalarni yechishda keng qo‘llanilmoqda. Spektral kollokatsiya metodlarida ushbu ko‘phadlardan foydalanish yuqori aniqlik va tez yaqinlashishni ta’minlaydi. Shuningdek, maqolada umumlashgan Chebishev tizimlari, gipergeometrik bog‘lanishlar va ortogonal ko‘phadlarni matritsalar asosida qurish kabi yangi ilmiy yo‘nalishlar ham ko‘rib chiqilgan.

Kalit so‘zlar: *Birinchi tur Chebishev ko‘phadlari, ortogonal ko‘phadlar, minimaks xossa, spektral metodlar, rekurrent formulalar, sonli analiz, yuqori aniqlik, o‘ta tez yaqinlashish.*

AN ANALYSIS OF SCIENTIFIC RESEARCH ON CHEBYSHEV POLYNOMIALS OF THE FIRST KIND AND THEIR APPLICATIONS

ABSTRACT

This article is devoted to the theoretical properties of Chebyshev polynomials of the first kind and their application in modern scientific research. These polynomials occupy a special place in numerical analysis due to such important features as orthogonality, minimax property, existence of recurrence relations, exact distribution of zeros and extrema. The article analyzes the fundamental mathematical properties of Chebyshev polynomials and highlights their effectiveness in interpolation, approximation, numerical differentiation and integration, as well as spectral methods. A study of the literature shows that Chebyshev polynomials of the first kind are widely used in solving ordinary and partial differential equations, Fredholm integral equations, fractional order differential and integrodifferential equations, and various boundary value problems. The use of these polynomials in spectral combination methods provides high accuracy and fast convergence. Additionally, the paper discusses emerging research directions, including generalized Chebyshev systems, hypergeometric linkages, and matrix-based constructions of orthogonal polynomials.

Keywords: *Chebyshev polynomials of the first kind, orthogonal polynomials, minimax property, spectral methods, iterative formulas, numerical analysis, high accuracy, ultrafast convergence.*

KIRISH

Birinchi tur Chebishev ko‘phadlari sonli hisoblash usullarida eng ko‘p qo‘llaniladigan ortogonal ko‘phadlar sinfiga kiradi. Ular interpolatsiyalash, approksimatsiyalash, sonli differensiallash va integrallash, optimallashtirish hamda chiziqli va chiziqli bo‘lmagan matematik modellarni yechishda muhim vosita hisoblanadi. Bunday keng qo‘llanilish Chebishev ko‘phadlarining ortogonallik,

minimaks xossa, ekstremal xossalar va qulay rekurrent formulalarga egaligi bilan izohlanadi:

1) birinchi tur Chebishev ko‘phadlari $T_n(x)$ kesma [-1,1] da $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

vazn bilan orthogonal, ya’ni

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\rho(x)dx=0,\ agar\ m\neq k,$$

(ortogonallik sharti);

2) Noldan farqli darajaga ega bo‘lgan Chebishev ko‘phadlarining barcha ildizlari haqiqiy, turli va (-1,1) intervalda joylashgan. (Chebishev ko‘phadlarining nollari);

3) Chebishev ko‘phadi $T_n(x)$ $(n>0)$ da [-1,1] kesmada (n+1) ta ekstremal qiymatlarga ega bo‘lib, ular absolyut miqdori bo‘yicha o‘zaro tengdir. (Chebishev ko‘phadlarining ekstremal xossasi);

4) Chebishev ko‘phadi $T_n(x)$, $(n>1)$ da boshqa bosh koeffitsiyenti birga teng bo‘lgan ko‘phadlarga nisbatan noldan eng kam chetlanuvchi ko‘phadlardan iborat;

Birinchi tur Chebishev ko‘phadlarini hisoblash uchun quyidagi rekkurent formula o‘rinli:

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,$$
$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\ n=1,2,3,\dots .$$

Bu holda, ularning hosilalari uchun ushbu rekkurent formulalarni chiqarish mumkin:

$$T_0'(x)=0,\ T_1'(x)=1,$$
$$T_{n+1}'(x)=2xT_n'(x)+2T_n(x)-T_{n-1}'(x),\ n=1,2,3,\dots$$
$$T_0''(x)=0,\ T_1''(x)=0,$$
$$T_{n+1}''(x)=2xT_n''(x)+4T_n'(x)-T_{n-1}''(x),\ n=1,2,3,\dots$$
$$T_0'''(x)=0,\ T_1'''(x)=0,$$
$$T_{n+1}'''(x)=2xT_n'''(x)+6T_n''(x)-T_{n-1}'''(x),\ n=1,2,3,\dots$$

Chebishev ko‘phadlari $T_n(x)$ni $-1 \le x \le 1$ kesmada quyidagi trigonometrik formula orqali ifodalash mumkin:

$$T_n(x) \equiv \cos(n \arccos x),\ n = 0,1,2,... \qquad (1)$$

bu yerda $\pi \ge \theta \equiv \arccos x \ge 0$. Kosinus funksiyaning ushbu ma’lum xossasiga asosan

$$T_{n\pm1}(x) = \cos((n \pm 1)\theta) = \cos(n\theta \pm \theta) = \cos n\theta \cdot \cos\theta \mp \sin n\theta \cdot \sin\theta \qquad (2)$$

quyidagi rekkurent formula o‘rinli bo‘ladi:

$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x),\ n \ge 1.$

bundan

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \ge 1 \qquad (3)$$

asosiy formulani hosil qilish mumkin.

Chebishev ko‘phadlari ta’rifi (1) dan $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ ekanligi ko‘rinadi va formula (3) ga asosan keying tartibli Chebishev ko‘phadlari uchun ushbu formulalar hosil qilinadi:

$T_0(x) = 1,$ $T_1(x) = x,$

$T_2(x) = 2x^2 - 1,$ $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$ $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$

va hokazo.

$T_n(x)$ ko‘phad, n ning qiymatiga qarab juft yoki toq bo‘lishi mumkin:

$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$

Endi $T_n(x_k) = 0$, agar $\cos(n\theta_k) = 0$ bo‘lgandaligini e’tiborga olsak, $\theta_k = (2k-1)\pi / (2n)$ ekanligini ko‘rish mumkin, ya’ni Chebishev ko‘phadlarining nollari $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)$tugunlarda joylashgan bo‘ladi. Chebishev ko‘phadlari o‘zlarining ekstremal qiymatlari $T_n(x_j) = \pm 1$ ga, $\cos n\theta_j = \pm 1$ nuqtalarda erishadi, bundan

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), \quad j = 0,1,2,....,n$$

(4)

va $T_n\left(x_j\right) = \left(-1\right)^j$ ni hosil qilish mumkin. Agarda skalyar ko‘paytma ushbu ko‘rinishda aniqlansa

$$\left(f,g\right) = \int_{-1}^{1} \frac{f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

yoki

$$\left(T_m,T_n\right) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n\left(x\right)T_m\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{0}^{\pi} \cos\theta\cos m\theta d\theta,$$

Chebishev ko‘phadlari [-1,1] kesmada ortogonal bo‘ladi.

Chebishev ko‘phadlari chekli qatorini integrallash mumkin. Quyidagi qatorni qaraylik

$$f_j = f\left(x_j\right) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k\left(x_j\right), \quad j = 0,1,2,...,N$$

va $x_j = \cos\left(j\pi/N\right)$ - Chebishev ko‘phadlarining ekstremum nuqtalari bo‘lsin. U holda formula (1.1) ga asosan ushbu formulani yozish mumkin.

$$f_j = \sum_{k=0}^{N} b_k \bar{a}_k \cos\left(kj\pi/N\right),$$

bunda

$$\bar{a}_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N} b_j f_j \cos\left(kj\pi/N\right)$$

bu yerda

$$\bar{a}_k = a_k/b_k, \quad b_0 = b_N = 1/2, \qquad b_1 = b_2 = ... = b_{N-1} = 1$$

METODLAR

Turli davlatlar olimlari tomonidan o‘z tadqiqotlarida samarali metodlar yaratish maqsadida I-tur Chebishev ko‘phadlarining qo‘llanilayotganligi to‘g‘risida to‘xtalamiz. Bunda asosan so‘nggi yillarda olib borilayotgan tadqiqotlarga asosiy e’tiborni qaratamiz.

Maqola [1] da yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan uzluksiz differensial tenglamani I-tur Chebishev ko‘phadlarini qo‘llagan holda dastlab integrallash metodi bilan yechish masalasi ko‘rilgan.

Maqola [2] kompleks tekislikdagi kvadratda aniqlangan normallashgan Chebishev ko‘phadlarining ekstremumlarini tuzish uchun sonli-analitik metod ishlab chiqishga bag‘ishlangan. Tadqiq etilayotgan ko‘phadlar I-tur klassik Chebishev ko‘phadlarining umumlashgan ko‘rinishidan iborat. Ushbu maqolada kompleks tekislikdagi kvadratda ekstremal ko‘phadlarni hisoblashga imkon berganligi ta’kidlangan.

Sakkizinchi tartibli chegaraviy masalanii sonli yechishda I-tur Chebishev ko‘phadlarining qo‘llanilishi maqola [2] dan o‘rin olgan. Ushbu maqolada tavsiya etilgan yondashuv asosida qaralayotgan masala chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi, so‘ngra ushbu tenglama noma’lum o‘zgarmaslarni topish maqsadida yechiladi. Qo‘llanilayotgan metodning samaradorligini namoyish etish uchun uchta misolga mos tanlangan analitik yechimlar jadval va grafiklarda taqqoslangan. Ushbu metod asosida olingan natijalardan metodning soddaligi va uning boshqa bir qator metodlarga nisbatan afzalliklari ko‘rsatilgan.

Maqola [3] da boshlang‘ich sharti kasrli differensial ko‘rinishda berilgan masalani Pikar iteratsiya metodining takomillashtirilgan ko‘rinishi orqali I-tur Chebishev ko‘phadlaridan foydalangan holda yechish metodi keltirilgan. Ushbu metod Pikar iteratsiya metodini o‘rganilayotgan masalaga mos differensial tenglamaning o‘ng tomonini Lejandr yoki I-tur Chebishev ko‘phadlari orqali ifodalashga asoslangan bo‘lib, bunda mos ravishda Pikar iteratsiya metodining ikkita takomillashgan ko‘rinishi hosil qilinadi. Ushbu takomillashtirilgan metodlarning samaradorligini

ko‘rsatish uchun paydo bo‘ladigan absolyut xatoliklar ularga qo‘yilgan ballar orqali hisoblangan.

I-tur Chebishev ko‘phadlari nafaqat differensial masalalarni yechishga, balki integral tenglamalarni yechishga ham samarali qo‘llanilgan. Ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasining (FIT) taqribiy yechimini olish masalasi maqola [4] da qaralgan. Ushbu masala cheklanmagan optimallashtirish masalasiga keltirilgan. Ushbu maqolada FIT sini yechish algoritmi keltirilgan, mazkur algoritm I-tur Chebishev ko‘phadlaridan foydalanishga asoslangan. Chebishev ko‘phadlari dastlab FIT ning noma’lum koeffitsiyentlarga ega bo‘lgan taqribiy yechimi sifatida qaraladi. Keltirilgan algoritm o‘z navbatida koeffitsiyentlarni ham hisoblaydi. Maqolada olingan natijalar taklif etilayotgan algoritmning Fredgolm integral tenglama (FIT)sini yechishda samarali va aniq ekanligini ko‘rsatadi.

Maqola [5] da Liyenarning yangi kengaytirilgan sistemasini I- tur Chebishev ko‘phadlari orqali tuzatishlar kiritib yechish masalasi qaralgan. Ushbu maqolada taklif etilayotgan algoritmning “U- simon uzatmali funksiyalar” ni va signallar nazariyasi sohasidagi ba’zi nuqtalar to‘plamini modellashtirish va approksimatsiyalashda samarali qo‘llash mumkinligi ta’kidlangan. I-tur Chebishev ko‘phadlariga oid yana bir tadqiqot natijalari maqola [6] dan o‘rin olgan. Ushbu maqolada I-tur karrali Chebishev ko‘phadlari ketma-ketligi qaralgan. Uning komponentalarini algebraik tenglamalar ko‘rinishida aniqlash va kuchli asimptotalarini topish uchun oshkor formula topilgan, xuddi shuningdek, mazkur ko‘phad ildizlarining taqsimlanishi tabiati ham o‘rganilgan.

Kuchsiz singulyar yadroga ega bo‘lgan xususiy hosilali integro- differensial tenglamaning vaqt bo‘yicha chiziqli bo‘lmagan kasr darajali masalasini yechish uchun I- tur Chebishev ko‘phadlarining takomillashgan siljitilgan yondashuvidan foydalanish maqola [7] da keltirilgan. Ushbu yondashuvning asosiy g‘oyasi boshlang‘ich va chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi yangi gil’bert fazosini yaratishdan iborat. Spektral kollokatsiyani qo‘llashga asoslangan yangi yondashuv yechimni olishda qo‘llanilgan.

Balanslashtiruvchi ko‘phadlar bilan I- va II- tur Chebishev ko‘phadlari orasidagi gipergeometrik aloqalarni aniqlash maqola [8] da keltirilgan. Ushbu maqolada qaralayotgan ko‘phadlar o‘rtasida bir nechta aloqalar mavjudligi aniqlangan. Bunda I- va II-tur Chebishev ko‘phadlari gipergeometrik koeffitsiyentlarga ega bo‘lgan balanslashtiruvchi ko‘phadlar ikkita qo‘shiluvchilarning yig‘indisidan iborat ekanligi aniqlangan.

Bir nechta turli yadrolarga ega bo‘lgan kasr darajali ko‘pfazali bog‘liqli Kortevega- De Friza (KDF) tenglamasini sonli yechish masalasi maqola [9] da bayon etilgan. Ushbu masalani algebraik sistema yoki differensial tenglamalar sistemasiga keltirsh uchun maqolada I-tur Chebishev ko‘phadlarining turli xossalaridan foydalaniladi. Maqoladagi asosiy maqsad turli yadroli kasr darajali ko‘pfazali bog‘liqli KDB tenglamasini yechishdan iborat. Maqolada keltirilishiga ko‘ra, spektral kollokatsiya metodini qo‘llash silliq koeffitsiyentlarga ega bo‘lgan masalalarni yechishda yuqori aniqlik va eksponensial yaqinlashishni ta’minlashi, hamda ushbu natijalar maqolada olib borilgan tadqiqotlarning afzalligini ko‘rsatadi.

Chebishev va Lejandr ko‘phadlari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechishda aralash differensiallash matritsalaridan foydalanish maqola [10] da keltirilgan. Ushbu maqolada bazis funksiyalari strukturasining yangi formasini tuzish qaralgan. Kiritilgan bazis funksiyalari Chebishev va Lejandr ko‘phadlarining kombinatsiyasidan iborat. Mazkur strukturalarni tuzishdan asosiy maqsad-differensiallash matritsalarining bir nechta formasini yaratishdan iborat. Ushbu matritsalar psevdospektral approksimatsiyalash nuqtai-nazaridan tuzilgan. Bundan tashqari maqolada taklif etilayotgan yondashuvdagi xatoliklarni tahlil etishga oid tadqiqotlar olib borilganligi ta’kidlangan. Bir nechta test funksiyalari tanlab olish orqali taklif etilayotgan matritsalarning samaradorligi va aniqligi namoyish etilgan. O‘z navbatida, kiritilgan matritsalarning korrektligi oddiy differensial tenglamalarni va ayrim boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechishda ko‘rsatilgan. Maqolada taklif etilayotgan yondashuv asosida olingan taqribiy yechimning aniq yechim va boshqa

metodlar orqali olingan natijalar bilan taqqoslanishi, uning samarali va aniq ekanligini ko‘rsatilishi ta’kidlangan.

Kasrli fazalar chetki nuqtalarida maxsusliklarga ega bo‘lgan funksiyalarni Chebishev approksimatsiyalashda xatolikning optimal baholarini aniqlash maqola [11] dan o‘rin olgan. Ushbu maqolada kasrli fazalarga oid ayrim yangi ta’riflar va yanada umumiy natijalar keltirilgan bo‘lib, ular fazaning chetki nuqtalarida maxsusliklarga ega bo‘lgan funksiyalar bilan ish ko‘rishda qo‘l keladi. Mualliflar tomonidan olingan asosiy natijalarning mos Chebishev interpolyatsiya va kvadratura formulasi xatolarining optimal baholarini olishda keng miqyosda foydalanish mumkinligi ta’kidlangan.

Maqola [12] da graflar nazariyasining to‘g‘ri kompleks matritsali metodlaridan ortogonal ko‘phadlarni, jumladan, Chebishev ko‘phadlarini tuzishda foydalanilgan, bunda rekursiyalardan foydalanilmagan. Ushbu maqolada tavsiya etilayotgan metodlar o‘zida graflarning murakkab aralash matritsalarini va ularning xarakteristik ko‘phadlarini to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblashni o‘z ichiga oladi.

Biribchi tur Chebishev ko‘phadlari va ularning xarakteristikalarining tahlili maqola [13] da keltirilgan. Ushbu maqolada ikkinchi tartibli ayirmali tenglamaning oshkor yechimini Chebishev ko‘phadlari orqali olish jarayoni ko‘rsatilgan. Olingan oshkor yechimlardan foydalangan holda Chebishev ko‘phadlarining simmetrikligi va ortogonalligi namoyish etilgan.

Maqola [14] da so‘nggi yillargacha irratsional funksiyalar to‘plami kiritilayotganligi va o‘rganilayotganligi, bunda Chebishev ko‘phadlarining kasr tartibli darajalaridan keng miqyosda foydalanilayotganligiga oid ma’lumotlar keltirilgan. Ushbu maqolada shu tariqa olingan funksiyalar psevdoChebishev funksiyalari deb atalishi aytib o‘tilgan.

Maqola [15] da I-turdagi Chebishev ko‘phadlari hosilalarining darajali yig‘indilarini o‘z ichiga olgan bir nechta muhim ayniyatlarning kombinatorika metodi va algebraik almashtirishlar orqali olinishi ko‘rsatilgan.

NATIJA

Tahlil natijalariga ko‘ra, birinchi tur Chebishev ko‘phadlarining asosiy xossalari ularni sonli masalalarni yechishda samarali vosita qiladi. Ularning ortogonallik xossasi hisoblashlarda mustahkam bazis hosil qiladi, rekurrent formulalari esa yuqori tartibli ko‘phadlarni qulay va tez hisoblash imkonini beradi. Minimax xossasi esa approximatsiyalangan yechimning maksimal chetlanishini minimal darajada saqlaydi, bu esa interpolatsiya, approksimatsiyalash va spektral metodlarda yuqori aniqlikni ta’minlaydi.

Adabiyotlar tahlili ko‘rsatadiki, birinchi tur Chebishev ko‘phadlari oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar, Fredgolm integral tenglamalari, kasr tartibli differensial va integro-differensial masalalar, shuningdek chegaraviy masalalarni yechishda keng qo‘llanilgan. Spektral kollokatsiya metodlarida Chebishev ko‘phadlarining tugun nuqtalari optimal taqsimlangan bo‘lib, yechimning tez yaqinlashishi va yuqori aniqligini ta’minlaydi.

Shuningdek, ushbu ko‘phadlar orqali olinadigan yechimlar boshqa sonli metodlar bilan solishtirilganda aniq va samarali ekanligi tasdiqlangan. Misollar va tahlillar shuni ko‘rsatadiki, Chebishev ko‘phadlaridan foydalanish hisoblash samaradorligini oshiradi va matematik modellashtirishda optimal natijalarni beradi.Bundan:

- Ortogonal bazis hosil qilishi sababli spektral metodlarda yuqori aniqlik beradi;
- Minimaks xossasi tufayli maksimal xatolik minimal bo‘ladi;
- Rekurrent formulalar hisoblash jarayonini soddalashtiradi;
- Ekstremal va nol nuqtalarining aniq taqsimlanishi kollokatsion metodlar uchun qulay tugunlar beradi.

Ko‘plab ishlarda Chebishev asosli metodlar eksponensial yaqinlashish va yuqori aniqlik ko‘rsatgani aytib o‘tilgan etilgan.

MUHOKAMA

Birinchi tur Chebishev ko‘phadlari sonli analiz masalalarini yechishda yuqori samaradorlikka ega ekanligini tahlil natijalaridan ko‘rishimiz mumkin. Ularning ortogonallik xossasi va rekurrent formulalari hisoblash jarayonini soddalashtiradi,

minimaks xossasi esa approksimatsiyalangan yechimning maksimal chetlanishini minimal darajada saqlash imkonini beradi. Shu sababli, Chebishev ko‘phadlariga asoslangan spektral va kollokatsiya metodlari yuqori aniqlik va eksponensial yaqinlashishni ta’minlaydi.

So‘nggi yillarda olib borilgan tadqiqotlar ko‘rsatadiki, birinchi tur Chebishev ko‘phadlari oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar, Fredgolm integral tenglamalari, kasr tartibli differensial va integro-differensial masalalarni yechishda keng qo‘llanilmoqda. Ularning qo‘llanilishi nafaqat natijalarni tez va aniqlik bilan olish imkonini beradi, balki metodlarni boshqa sonli yondashuvlar bilan solishtirganda samaradorligini oshiradi.

Shuningdek, muhokama qilingan tadqiqotlar Chebishev ko‘phadlarining ba’zi cheklovlarini ham ko‘rsatadi. Masalan, yuqori o‘lchamli yoki murakkab chegaraviy masalalarda hisoblash murakkabligi ortishi mumkin, va qo‘shimcha transformatsiyalar yoki metodlar talab qilinadi. Shu qatorda, umumlashgan Chebishev tizimlari, psevdoChebishev funksiyalar va gipergeometrik bog‘lanishlar yangi tadqiqot yo‘nalishlarini ochadi. Matritsalar asosidagi konstruktsiyalar va yuqori o‘lchamli spektral metodlar zamonaviy kompyuter modellari bilan birlashtirilganda yanada samarali bo‘lishi mumkin.

Natijalar shuni ko‘rsatadiki, birinchi tur Chebishev ko‘phadlari nafaqat matematik jihatdan qulay, balki amaliy masalalarda ham keng qo‘llanilishi mumkin. Ular signallar nazariyasi, fizika va injenerlik masalalarida optimal yechimlar topishda muhim vosita sifatida ishlatiladi. Shu bilan birga, Chebishev ko‘phadlariga asoslangan metodlarning yuqori aniqlik, tezkorlik va universal qo‘llanilishi ularni zamonaviy ilmiy va amaliy tadqiqotlar uchun muhim vosita sifatida namoyon qiladi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Normurodov Ch.B., Djurayeva N.T., M. S. Anuar., F. Deraman., S. M. Asi. On an effective method for solving a boundary value problem for an inhomogeneous

ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative // Malaysian Journal of Science (Mjs)

2. Трубников Ю.В., Чернявский М.М. О численно-аналитическом методе построения экстремальных полиномов комплексного аргумента // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия «Физика и математика». – 2023. - вып. 59. No. 1, с. 18–36. DOI: 10.29235/1561-2430-2023-59-1-18-36

3. Musiliu Tayo Raji., Christie Yemisi Ishola., Olutola Olayemi Babalola., Tawakalt Abosede Ayoola., Nasiru Muhammed Momoh., Olumuyiwa James Peter. Numerical solution of eight order boundary value problems using Chebyshev polynomials // mathematics and computational sciences. – V. 4(1). 2023. pp:18-28. DOI:10.30511/mcs.2023.1988829.1108.- V. 4(1)

4. Iman Rajab Basha., Bachir Nour Kharrat., Ghada Joujeh. Modified of Picard Iteration Method Using some Orthogonal Conventional Polynomials for Solving Initial Value Problems with Nonlinear Differential. R.J. of. Alep po Univ. Science Series, 2023 No. 163 // https:// www.researchgate.net/ publication/ 367204711.

5. Azzam S.Y. Aladool., Mohammed Abdulrazaq Kahya. Solving Fredholm integral equations using bees algorithm based on Chebyshev polynomials // International Journal of Applied Mathematics. – V. 35. - No. 6 – 2022. – P. 855-865. - DOI: 10.12732/ ijam.v35i6.4

6. Vesselin Kyurkchiev, Anton Iliev., Asen Rahnev., Nikolay Kyurkchiev. Lienard system with first kind Chebyshev's polynomial–correction in the light of Melnikov's approach. Simulations and possible applications // International Scientific Conference IMEA. 2022 23–25 November 2022, Pamporovo, Bulgaria

7. Fidalgo U. // Type I Chebyshev Polynomials. - December 20, 2022. - 2000 Mathematics Subject Classification. Primary 54C40, 14E20; Secondary 46E25, 20C20. Department of Mathematics and Statistics, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio 43403. Email address: ufx6@case.edu

8. Atta A.G., Youssri Y.H. Advanced shifted first-kind Chebyshev collocation approach for solving the nonlinear time-fractional partial integro-differential equation

with a weakly singular kernel // Computational and Applied Mathematics. 2022.- 41:381 https://doi.org/10.1007/s40314-022-02096-7

9. Behera A., Ray P.K. Hypergeometric connections between balancing polynomials and Chebyshev polynomials of first and second kinds // Armenian Journal of Mathematics. - Volume 14, Number 12, 2022, 1–20 https://doi.org/10.52737/18291163-2022.14.12-1-20

10. Khaled Mohammed Saad., Hari Mohan Srivastava. Numerical Solutions of the Multi-Space Fractional-Order Coupled Korteweg–De Vries Equation with Several Different Kernels // MDPI-fractal and fractional international scientific journal. – 2023. 7. 716. https://doi.org/10.3390/ fractalfract7100716

11. Nhat_A. Nghiem., Tzu-Chieh_Wei. An improved method for quantum matrix multiplication // August 2023Quantum Information Processing 22(8). - DOI:10.1007/s11128-023-04054-6

12. Ruiyi Xie., Boying Wu., Wenjie Liu. Optimal Error Estimates for Chebyshev Approximations of Functions with Endpoint Singularities in Fractional Spaces // Journal of Scientific Computing 96(3). – 2023. DOI:10.1007/s10915-023-02292-5

13. Krishnan Balasubramanian. Orthogonal polynomials through complex matrix graph theory // Journal of Mathematical Chemistry 61(17). DOI:10.1007/s10910-022-01415-x.

14. Ikhsan Maulidi1., Bonno Andri Wibowo., Vina Apriliani., Rofiqul Umam. The Characteristics of the First Kind of Chebyshev Polynomials and its Relationship to the Ordinary Polynomials // JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika) http://journal.ummat.ac.id/index.php/jtam. Vol. 5, No. 2, October 2021, pp. 323-331. https://doi.org/10.31764/jtam.v5i2.4647

15. Paolo Emilio Ricci. Chebyshev Polynomials, Rhodonea Curves and Pseudo-Chebyshev Functions. A Survey // International Journal of Computational Intelligence Systems. Vol . XX(Z); Month (Year), pp. xx–yy. https://www.atlantis-press.com/journals/ijnd